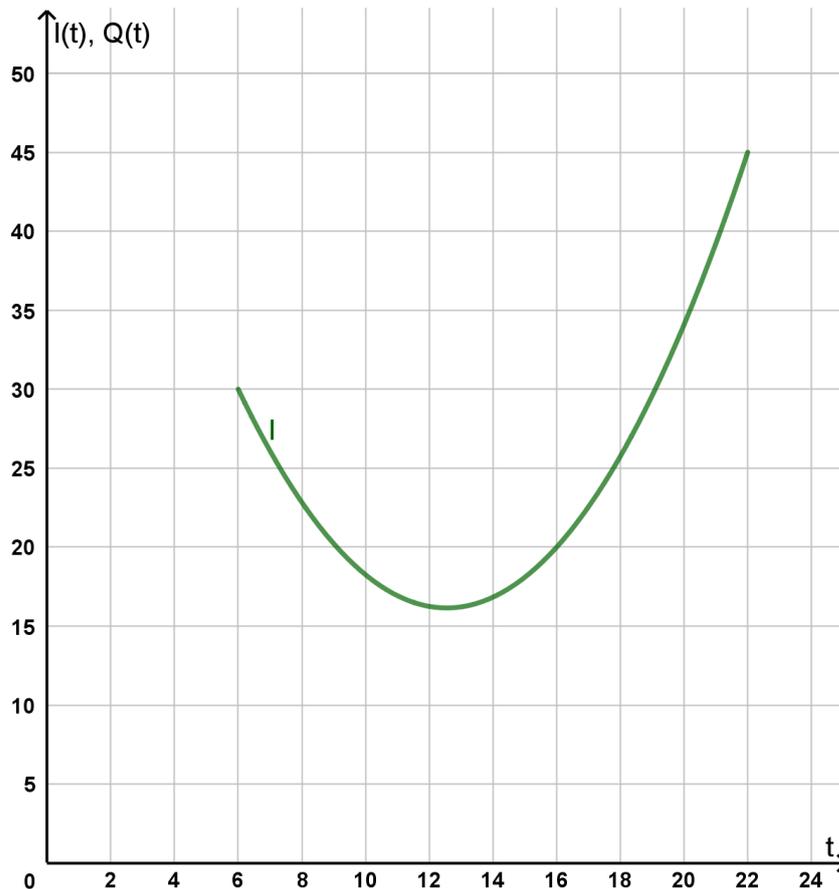


Aufgabe 45

In einem elektrischen Stromkreis transportieren (meist) Elektronen Energie zu einem Gerät, um dieses in Betrieb zu setzen. Elektronen sind elektrisch geladen. Die elektrische Ladung Q eines Körpers wird in Coulomb (C) gemessen. Die momentane Änderungsrate der elektrischen Ladung bezüglich der Zeit t (in Sekunden) bezeichnet man als elektrische Stromstärke I (in Ampere). Sie gibt an, wie viel Ladung pro Sekunde an dem Punkt des Leiters, an dem gemessen wird, vorbeifließt.

- a) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion I , welche die elektrische Stromstärke während des Zeitintervalls $[6, 22]$ in einem Leiter beschreibt. Skizziere in die Abbildung den Graphen der Funktion Q der elektrischen Ladung, für die $Q(13) = 30$ gilt.



- b) Die Funktion der elektrischen Stromstärke ist in einem anderen Leiter im Zeitintervall $[0; 9]$ durch die Funktionsgleichung $I(t) = -\frac{1}{600} \cdot t^2 - \frac{1}{600} \cdot t + 0,15$ gegeben. Bestimme eine Zeit-Ladungsfunktion für den Stromfluss der durch die Funktion I

beschriebenen elektrischen Stromstärke und berechne die Ladungsmenge, die im Zeitintervall $[3, 9]$ am Messpunkt vorbeifließt.

- c) Im Folgenden sind einige Aussagen zu den Funktionsgleichungen $Q(t)$, $I(t)$ und $I'(t)$ für die Ladung Q , die elektrische Stromstärke I und die momentane Änderungsrate I' der elektrischen Stromstärke gegeben.

Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

Ist die elektrische Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben, so ist die Zeit-Ladungsfunktion eindeutig festgelegt.	<input type="checkbox"/>
Ist die Funktion für die elektrische Stromstärke konstant, so hängt die Zeit-Ladungsfunktion im Intervall $[t_1; t_2]$ linear von der Zeit ab.	<input type="checkbox"/>
Sind $Q(t)$ und $Z(t)$ zwei Zeit-Ladungsfunktionen, die zur elektrischen Stromstärkenfunktion $I(t)$ gehören, so unterscheiden sich Q und Z nur durch eine Konstante.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $I(t)$ der elektrischen Stromstärke I kann aus einer gegebenen Funktion $I'(t)$ für ihre momentane Änderungsrate I' eindeutig bestimmt werden.	<input type="checkbox"/>
Ist $I(t)$ linear, so ist es auch $Q(t)$	<input type="checkbox"/>

Lösungen:

Ad a)

Die Stromstärke I wird in der Graphik durch eine quadratische Funktion der Form

$I(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben. Es gilt nun die Parameter a , b und c so zu bestimmen, dass mit $I(t)$ der abgebildete Graph modelliert wird.

Aus der Abbildung erhält man:

$$\begin{aligned} I(6) &= 30 &\Rightarrow & 36a + 6b + c = 30 \\ I(16) &= 20 &\Rightarrow & 256a + 16b + c = 20 \\ I(22) &= 45 &\Rightarrow & 484a + 22b + c = 45 \end{aligned}$$

Mit diesem Gleichungssystem erhält man für die Parameter a , b , c :

$$a = \frac{31}{96}; \quad b = -\frac{389}{48}; \quad c = 67$$

Die Funktionsgleichung der Stromstärke I lautet damit:

$$I(t) = \frac{31}{96}t^2 - \frac{389}{48}t + 67$$

Für die Funktion Q der elektrischen Ladung erhält man:

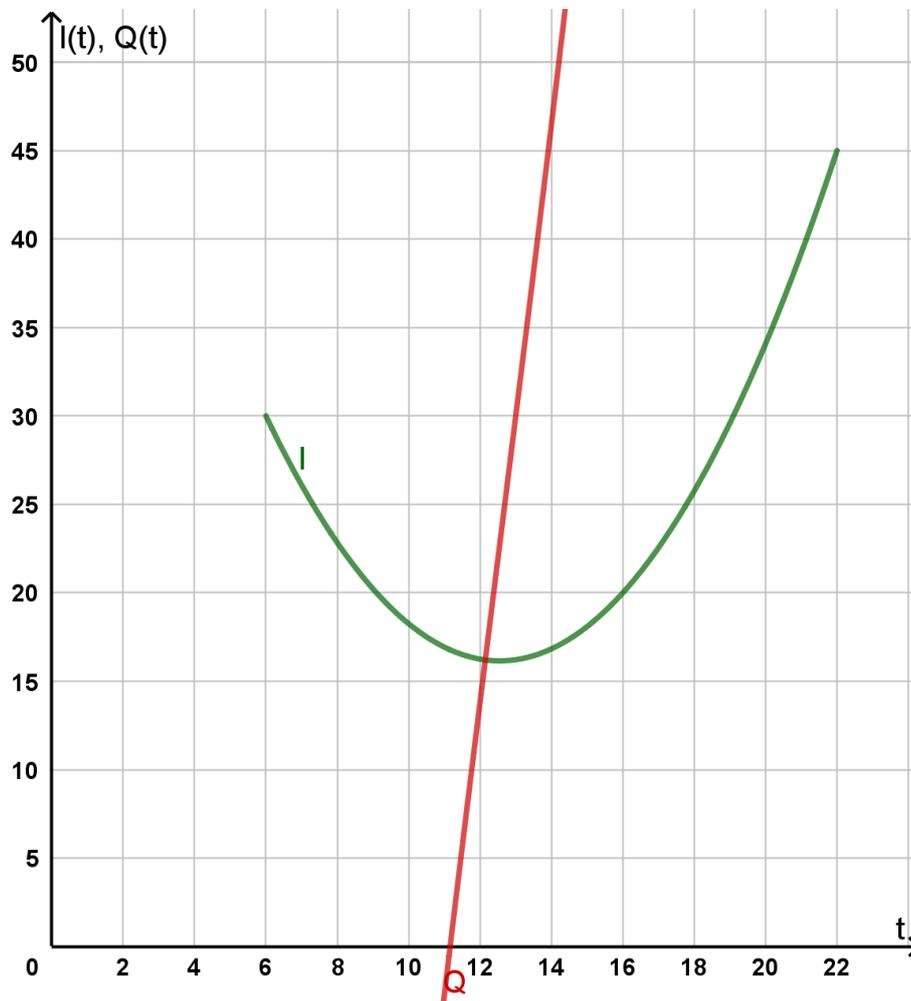
$$Q(t) = \int I(t) dt = \frac{31}{288}t^3 - \frac{389}{96}t^2 + 67t + c$$

Aus der Bedeutung $Q(13) = 30$ ergibt sich für die Konstante c :

$$c = -\frac{2873}{72}$$

Damit lautet die Gleichung der Funktion Q

$$Q(t) = \frac{31}{288}t^3 - \frac{389}{96}t^2 + 67t - \frac{28273}{72}$$



Ad b)

Aus der

$$I(t) = -\frac{1}{600} \cdot t^2 - \frac{1}{600} \cdot t + 0,15 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = -\frac{1}{1800} \cdot t^3 - \frac{1}{1200} \cdot t + 0,15t + c$$

Berechnung der Ladungsmenge im Intervall $[3; 9]$:

$$Q(9) - Q(3) = 0,45 \text{ C}$$

Ad c)

Ist die elektrische Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben, so ist die Zeit-Ladungsfunktion eindeutig festgelegt.	<input type="checkbox"/>
Ist die Funktion für die elektrische Stromstärke konstant, so hängt die Zeit-Ladungsfunktion im Intervall $[t_1; t_2]$ linear von der Zeit ab.	<input checked="" type="checkbox"/>
Sind $Q(t)$ und $Z(t)$ zwei Zeit-Ladungsfunktionen, die zur elektrischen Stromstärkenfunktion $I(t)$ gehören, so unterscheiden sich Q und Z nur durch eine Konstante.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Funktion $I(t)$ der elektrischen Stromstärke I kann aus einer gegebenen Funktion $I'(t)$ für ihre momentane Änderungsrate I' eindeutig bestimmt werden.	<input type="checkbox"/>
Ist $I(t)$ linear, so ist es auch $Q(t)$	<input type="checkbox"/>

Begründung der Aussagen:

Aussage 1: Falsch

Die elektrische Stromstärke $I(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gibt an, um welchen Betrag sich die elektrische Ladungsmenge verändert hat. Damit kann keinesfalls auf die Zeit-Ladungsfunktion geschlossen werden.

Aussage 2: Richtig

Es sei k die elektrische Stromstärke im Zeitintervall $[t_1; t_2]$, dann gilt:

$$I(t) = k \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \int I(t) dt = \int k dt = k \cdot t + c$$

Aussage 3: Richtig

Wenn $Q(t)$ und $Z(t)$ zwei Zeit-Ladungsfunktionen der Stromstärkefunktion $I(t)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int I(t) dt + c_1 \\ Z(t) &= \int I(t) dt + c_2 \end{aligned}$$

Aussage 4: Falsch

Die Funktion $I(t)$ ist eine Stammfunktion der Funktion $I'(t)$ und kann daher aus der Funktion $I'(t)$ allein nicht eindeutig bestimmt werden. Es gilt:

$$I(t) = \int I'(t) dt = \int I'(t) dt + c$$

Aussage 5: Falsch

$Q(t)$ ist eine Stammfunktion von $I(t)$. Wenn $I(t)$ linear ist, dann muss die Stammfunktion eine quadratische Funktion sein.