

Aufgabe 56

Gegeben ist eine lineare Funktion f .

- 1) Berechne die Ober- und Untersumme O_n und U_n von f in $[1; 7]$ durch Unterteilung in $n = 2, n = 3$ und $n = 6$ gleich große Teilintervalle.
- 2) Berechne den Flächeninhalt A , den der Graph von f und die x-Achse im Intervall $[1, 7]$ miteinander einschließen.
- 3) Zeige, dass gilt: $U_2 \leq U_3 \leq U_6 \leq A \leq O_6 \leq O_3 \leq O_2$

Lösungen:

Ad a) $f(x) = 2x + 1$

ad 1)

$$n = 2 \Rightarrow \Delta x = \frac{7-1}{2} = 3$$

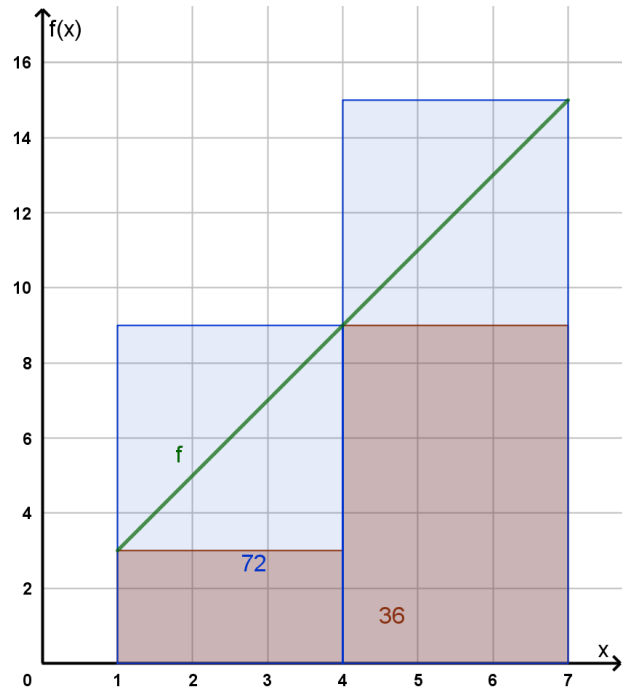
x	f(x)
1	3
4	9
7	15

Untersumme:

$$U_2 = \Delta \cdot (f(1) + f(4)) = 3 \cdot (3 + 9) = 36$$

Obersumme:

$$O_2 = \Delta \cdot (f(4) + f(7)) = 3 \cdot (9 + 15) = 72$$



$$n = 3 \Rightarrow \Delta x = \frac{7-1}{2} = 2$$

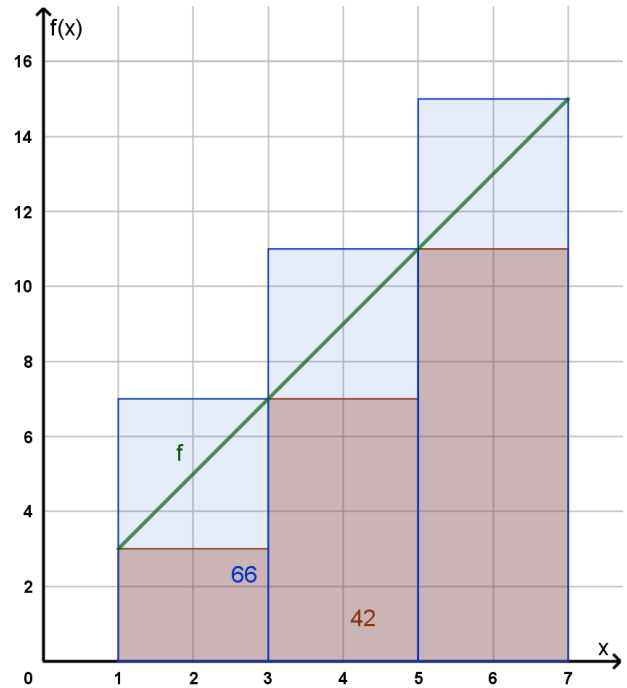
x	$f(x)$
1	3
3	7
5	11
7	15

Untersumme:

$$\begin{aligned} U_3 &= \Delta x \cdot (f(1) + f(3) + f(5)) = \\ &= 2 \cdot (3 + 7 + 11) = \\ &= 42 \end{aligned}$$

Obersumme:

$$\begin{aligned} O_3 &= \Delta x \cdot (f(3) + f(5) + f(7)) = \\ &= 2 \cdot (7 + 11 + 15) = \\ &= 66 \end{aligned}$$



$$n = 6 \Rightarrow \Delta x = \frac{7-1}{6} = 1$$

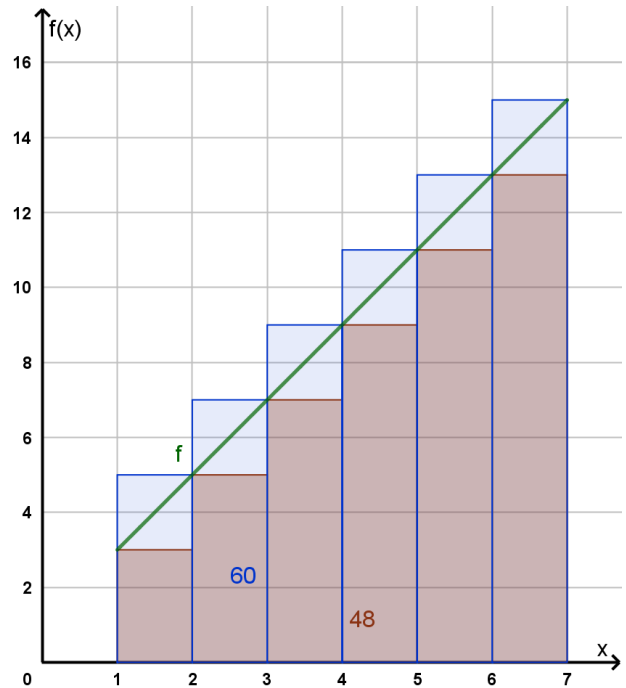
x	f(x)
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15

Untersumme:

$$\begin{aligned} U_6 &= \Delta x \cdot (f(1) + f(2) + \dots + f(6)) = \\ &= 1 \cdot (3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13) = \\ &= 48 \end{aligned}$$

Obersumme:

$$\begin{aligned} O_3 &= \Delta x \cdot (f(2) + f(3) + \dots + f(7)) = \\ &= 1 \cdot (5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) = \\ &= 60 \end{aligned}$$



ad 2) Flächeninhalt im Intervall $[1; 7]$

$$A[1; 7] = \frac{(f(1) + f(7)) \cdot 6}{2} = \frac{(15 + 3) \cdot 6}{2} = 18 \cdot 3 = 54$$

ad 3)

$$U_2 = 36 \leq U_3 = 42 \leq U_6 = 48 \leq A = 54 \leq O_6 = 60 \leq O_3 = 66 \leq O_2 = 72$$