Aufgabe 84

Berechne das bestimme Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und gib an, ob dieser Wert der Flächeninhalt ist, den der Graph von f mit der x-Achse in $[a;\,b]$ einschließt.

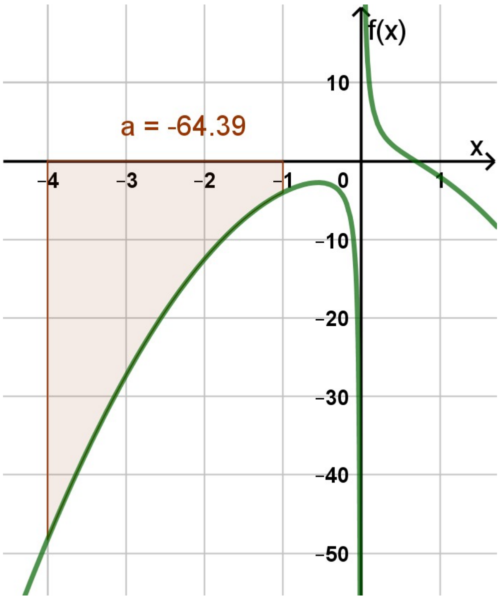
a) $\int_{-4}^{-1} \left(-3x^2 + x^{-1}\right) dx$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} -2 \cdot \sin(x)\, dx$

i) $\int_{-1}^{1} \left(-3 \cdot e^x\right) dx$

Lösungen:

Ad a)



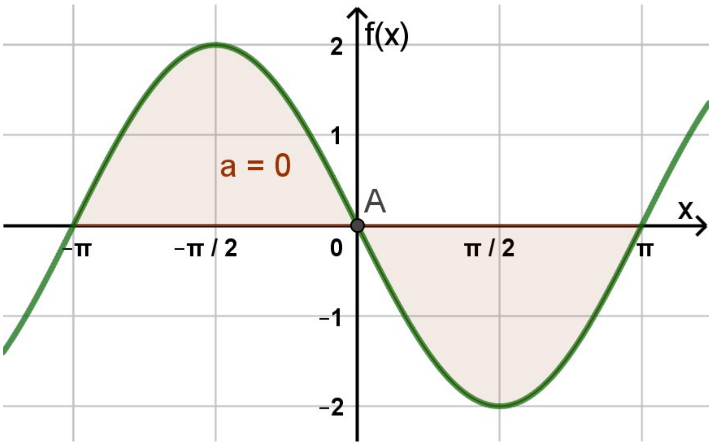
$$\int_{-4}^{-1} \left(-3x^2 + x^{-1}\right) dx = -x^3 + \ln(|x|)\Big|_{-4}^{-1} =$$
$$= -(-1)^3 + \ln(1) - \left(-(-4)^3 + \ln|-4|\right) =$$
$$= -1 - (64 + 1{,}3853) =$$
$$= \mathbf{-64{,}3853}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$-3x^2 + x^{-1} = 0$$
$$-3x^3 + 1 = 0$$
$$x^3 = \frac{1}{3}$$
$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \mathbf{0{,}6934}$$

Die Funktion f hat im Intervall $[-4\,;\,0[$ nur negative Werte, d.h. das berechnete Integral entspricht dem nicht Flächeninhalt den der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt.

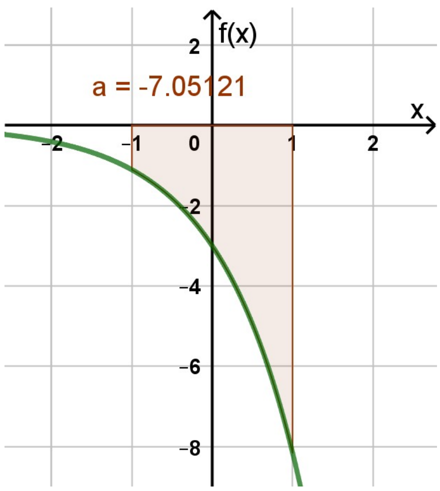
Ad e)



$$\int_{-\pi}^{\pi} -2 \cdot \sin(x)\, dx = -2 \cdot \cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$
$$= -2 \cdot [\cos(\pi) - \cos(-\pi)] =$$
$$= -2 \cdot [-1 - (-1)] =$$
$$= \mathbf{0}$$

Weil die Funktion f hat im Intervall $[-\pi\,;\,\pi[$ eine Nullstelle bei $x = 0$ hat, hat der Graph der Funktion negative und positive Werte, d.h. das berechnete Integral entspricht dem nicht Flächeninhalt den der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt.

Ad i)



$$\int_{-1}^{1} \left(-3 \cdot e^x\right) dx = -3 \cdot e^x \Big|_{-1}^{1} =$$
$$= -3 \cdot \left[e^1 - e^{-1}\right] =$$
$$= -3 \cdot \left[e - 0{,}3679\right] =$$
$$= \mathbf{-7{,}0512}$$

Die Funktion f hat ausschließlich negative Funktionswerte, d.h. das berechnete Integral entspricht dem nicht Flächeninhalt den der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt.