

Aufgabe 103

Gegeben ist eine Funktion f . Bestimme den Flächeninhalt, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt und skizziere den Graphen von f sowie den gesuchten Flächeninhalt.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

Lösungen:

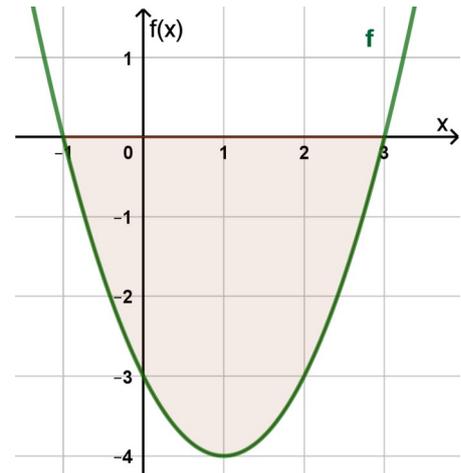
Ad a)

Berechnung der Nullstellen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
 x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} = \\
 &= 1 \pm 2 \\
 x_1 &= -1 \\
 x_2 &= 3
 \end{aligned}$$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \\
 &= \left| \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right|_{-1}^3 = \\
 &= \left| \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \right] \right| = \\
 &= \left| -9 - \left[-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right] \right| = \\
 &= 10\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

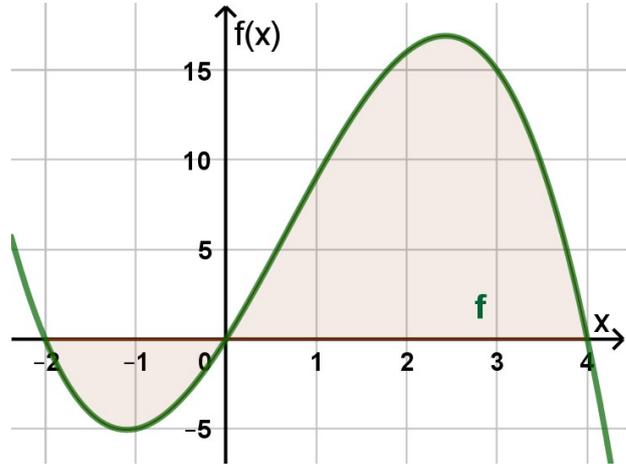


Ad e)

Berechnung der Nullstellen:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 8x &= 0 \\ -x \cdot (x^2 - 2x - 8) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1+8} = \\ &= 1 \pm 3 \\ x_1 &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$



Berechnung des Flächeninhalts:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^0 (-x^3 + 2x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_0^4 (-x^3 + 2x^2 + 8x) dx \right| = \\ &= \left| -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right|_{-2}^0 + \left| -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right|_0^4 = \\ &= \left| \frac{(-2)^4}{4} - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 \right| + \left| -\frac{4^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right| = \\ &= \left| -6\frac{2}{3} \right| + \left| 42\frac{2}{3} \right| = \\ &= 49\frac{1}{3} \end{aligned}$$