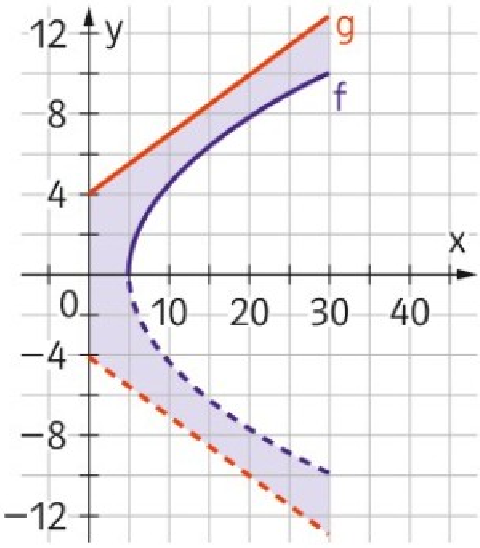
Aufgabe 164

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{ax + b}$ und g mit $g(x) = cx + d$ dargestellt.

Rotiert das Flächenstück, welches durch die beiden Graphen in $[0\,;\,30]$ begrenzt wird, um die x-Achse, entsteht eine kleine Vase. Der obere Radius der Vase ist 13 cm. Alle anderen Maße sind der Abbildung zu entnehmen.

1) Stelle jeweils eine Funktionsgleichung für f und g auf.
2) Berechne das Volumen der Vase, so wie ihre Masse, wenn das Material eine Dichte von 2,4 g/cm³ besitzt.
3) Berechne wie viel Liter Wasser in die Vase passen.
4) Berechne die Wasserhöhe, nachdem man einen Liter Wasser in die Vase gefüllt hat.



Lösungen:

Ad a)

Ad 1)

Bestimmung der Funktionsgleichung von f :

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lllllll} f(5) & = & 0 & \Rightarrow & \sqrt{5a+b} & = & 0 \\ f(30) & = & 10 & \Rightarrow & \sqrt{30a+b} & = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{a=4} \quad \boldsymbol{b=-20}$$

$$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{4x-20}}$$

Bestimmung der Funktionsgleichung von g :

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lllllll} g(0) & = & 4 & \Rightarrow & d & = & 4 \\ g(20) & = & 10 & \Rightarrow & 20c+4 & = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{c=\frac{3}{10}} \quad \boldsymbol{b=4}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{3}{10}x+4}$$

Ad 2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \pi\cdot\left[\int_0^{30} g(x)^2\,dx-\int_5^{30} f(x)^2\,dx\right] = \\ &= \pi\cdot\left[\int_0^{30}\left(\frac{3}{10}x+4\right)^2 dx-\int_5^{30}\left(\sqrt{4x-20}\right)^2 dx\right] \end{aligned}$$

$$\int_0^{30} \left(\frac{3}{10}x + 4\right)^2 dx = \int_0^{30} \frac{9}{100}x^2 + \frac{12}{5}x + 16\ dx = \frac{3}{100}x^3 + \frac{6}{5}x^2 + 16x\ \Big|_0^{30} = \mathbf{2370}$$

$$\int_5^{30} \left(\sqrt{4x-20}\right)^2 dx = \int_5^{30} 4x - 20\ \ dx = 2x^2 - 20x\ \Big|_5^{30} = 2\cdot 30^2 - 20\cdot 30 - \left(2\cdot 5^2 - 20\cdot 5\right) = 1800 - 600 - 50 + 100 = \mathbf{1250}$$

$$\boldsymbol{V} = \pi\cdot\left[\int_0^{30} g(x)^2\ dx - \int_5^{30} f(x)^2\ dx\right] = \pi\cdot\left[2370 - 1250\right] = \mathbf{1120\cdot\boldsymbol{\pi}}$$

Berechnung der Masse:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad\Rightarrow\quad m = \varrho\cdot V$$

$\boldsymbol{m} = 2{,}4\cdot 1120\cdot\pi = 8444{,}6\ g = \mathbf{8{,}4\ \boldsymbol{kg}}$

Ad 3)

Das Volumen, der möglichen Füllmenge der Vase ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{V} = \pi\cdot\int_5^{30}\left(\sqrt{4x-20}\right)^2 dx = \mathbf{1250\cdot\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{cm}^3 = 3{,}927\ \boldsymbol{l}}$$

Ad 4)

$$\left.\begin{aligned}
\pi \cdot \int_5^a \left(\sqrt{4x-20}\right)^2 \, dx &= 1000 \\
\pi \cdot \int_5^a 4x-20 \, dx &= 1000 \\
\pi \cdot \left(2x^2-20x \;\Big|_5^a \right) &= 1000 \\
\pi \cdot \left[2\cdot a^2-20\cdot a-\left(2\cdot 5^2-20\cdot 5\right)\right] &= 1000 \\
\pi \cdot \left[2\cdot a^2-20\cdot a+50\right] &= 1000 \\
a^2-10\cdot a+25 &= \frac{500}{\pi}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 17{,}62\ cm}$$

Die Füllhöhe in der Vase ergibt sich aus:

$\boldsymbol{h} = 17{,}62 - 5 = \mathbf{12{,}61}\,\boldsymbol{cm}$