Aufgabe 219

Der Innenraum eines $h = 35\ cm$ hohen Gefäßes besitzt in jeder Höhe z eine annähernd rechteckige Querschnittsfläche. Die Breite des Gefäßes ist in jeder Höhe $b(z) = \frac{5}{7} z + 20$. Die Länge ist am Boden $a = 40 cm$, am Ende $c = 25 cm$ und nimmt linear ab. Berechne das Volumen des Innenraums.

Lösungen:

Funktionsgleichung für die Länge $a(z) = k \cdot x + d$:

$a(0) = 40 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d = 40}$

$$\begin{aligned} a(35) &= 25 \\ k \cdot 35 + 40 &= 25 \\ k \cdot 35 &= -15 \\ \boldsymbol{k} &= -\frac{15}{35} = \boldsymbol{-\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a(z) = -\frac{3}{7} \cdot z + 40}$$

Berechnung des Volumens:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \int_0^{35} \left(-\frac{3}{7} z + 40\right) \cdot \left(\frac{5}{7} z + 20\right) dz = \\ &= \int_0^{35} -\frac{15}{49} z^2 + 20 z + 800 \; dz = \\ &= -\frac{5}{49} z^3 + 10 z^2 + 800 z \; \Big|_0^{35} = \\ &= \boldsymbol{35875 \; cm^3} \end{aligned}$$