Aufgabe 155

Der Graph der Funktion f rotiert um die **1)** x-Achse **2)** y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

a) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1, \quad 2 \le x \le 4$

Lösungen:

Rotation um x-Achse:

$$
\begin{aligned}
V[2;\,4] &= \pi \cdot \int_2^4 (f(x))^2\,dx &&= \\
&= \pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2 dx &&= \\
&= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{80}+\frac{1}{6}x^3+x\,\Big|_2^4\right) &&= \\
&= \pi \cdot \left(\frac{412}{15}-\frac{56}{15}\right) &&= \\
&= \boldsymbol{\pi \cdot \frac{356}{15}} &&=
\end{aligned}
$$

Rotation um y-Achse:

Bestimmung der Umkehrfunktion g von f:

$$y = \frac{x^2}{4}+1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{4y-4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g(y) = \sqrt{4y-4} = 2 \cdot \sqrt{y-1}}$$

Bestimmung der Grenzen für g:

$$
\begin{aligned}
x &= 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \\
x &= 4 \quad \Rightarrow \quad y = 5
\end{aligned}
$$

Volumenberechnung:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V[2;5]} &= \pi \cdot \int_2^5 g(y)^2 dy &&= \\
&= 2\pi \cdot \int_2^5 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy &&= \\
&= 2\pi \cdot \int_2^5 y - 1 \; dy &&= \\
&= 2\pi \cdot \left(y^2 - y \;\Big|_2^5 \right) &&= \\
&= \mathbf{57 \cdot \pi}
\end{aligned}
$$